Esempio

2.1 Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Il limite non esiste. Infatti, la restrizione di $f(x,y)$ alla retta $y=x$ è

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

perciò tende a $\frac{1}{2}$. Invece, la restrizione di $f(x,y)$ alla retta $y=-x$ è

$$f(x,-x)=\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2},$$

perciò tende a $-\frac{1}{2}$. Essendo i due limiti diversi, il limite di f non esiste.

2.4 Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Dimostriamo che il limite non esiste. Infatti, la restrizione di f alle due curve $y=\pm x^2$ è:

$$f\left(x,x^2\right)=\frac{\pm x^2x^2}{x^4+x^4}=\pm\frac{1}{2},$$

pertanto lungo le due curve la funzione ha due limiti diversi e il limite in due variabili non esiste.

Notiamo che, se scrivessimo la funzione in coordinate polari,

$$f\left(\rho,\theta\right)=\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\frac{\rho\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta},$$

troveremmo che, per ogni θ fissato, $f\left(\rho,\theta\right)\to 0$ per $\rho\to 0$. Questo significa che lungo ogni retta uscente dall'origine la funzione ha lo stesso limite (zero). Tuttavia il limite in due variabili non esiste.